Moti quasi-periodici per sistemi Hamiltoniani

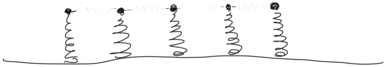
L. Corsi

Università di Roma Tre

Giornata INDAM 10-5-2022

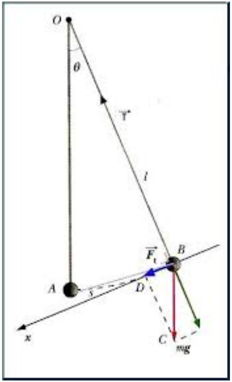
Introduzione

Supponiamo di avere un sistema meccanico molto semplice di cui sappiamo descrivere esattamente le leggi del moto
per esempio delle molle...

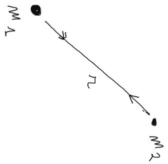


Introduzione

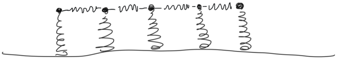
Supponiamo di avere un sistema meccanico molto semplice di cui sappiamo descrivere esattamente le leggi del moto
per esempio delle molle... oppure un pendolo...



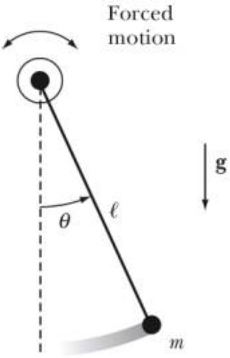
...oppure due punti materiali (pianeti) che interagiscono tramite la forza gravitazionale



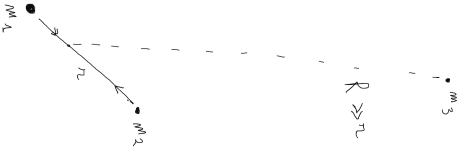
Dato che nessun modello è esatto ma sempre frutto di una approssimazione supponiamo di aggiungere una piccola perturbazione per esempio:
Le molle sono accoppiate tra loro in modo molto debole



Dato che nessun modello è esatto ma sempre frutto di una approssimazione supponiamo di aggiungere una piccola perturbazione per esempio:
Le molle sono accoppiate tra loro in modo molto debole
Il pendolo viene forzato ad oscillare

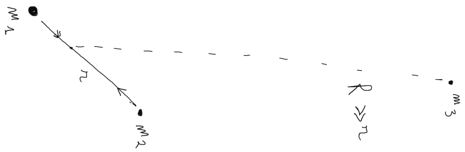


Oppure aggiungiamo un terzo punto materiale molto lontano, o di massa molto piccola.



Cosa succede alla dinamica?

Oppure aggiungiamo un terzo punto materiale molto lontano, o di massa molto piccola.



Cosa succede alla dinamica?

Che succede alla dinamica?

È fondamentale sapere

quando una approssimazione è accettabile e per quanto tempo

se il moto che sto osservando si svolge in un tempo finito e in una regione di spazio finita il problema non è particolarmente complicato
se l'errore nella forza è di ordine $\epsilon \ll 1$ lo sarà anche l'errore nella traiettoria

cosa succede quando si perturbano orbite ricorrenti cioè triettorie che ripetono lo stesso comportamento per tempi infiniti?

I sistemi Hamiltoniani

I nostri esempi sono Hamiltoniani: le variabili dinamiche sono (p, q)

Sistemi Hamiltoniani

Esiste una costante del moto $H(p, q)$ che permette di dedurre la dinamica (equazioni di Hamilton)

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial}{\partial p} H(p, q) \\ \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q} H(p, q) \end{cases}$$

per esempio per le molle

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) + \frac{k}{2}(q_1^2 + \cdots + q_n^2)$$

per il pendolo

$$H = \frac{p^2}{2m} - mg\cos(q)$$

per i due pianeti

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{q} + \frac{L^2}{2mq^2}$$

I sistemi Hamiltoniani

La teoria dei sistemi Hamiltoniani è ricchissima noi useremo solo:

1. L'Hamiltoniana è costante lungo le traiettorie
2. La struttura Hamiltoniana può essere formulata in modo intrinseco (indipendente dalle coordinate, purché simplettiche)

Nei nostri esempi di base (sistemi di molle disaccoppiate, pendolo semplice, problema dei due corpi):

- si può descrivere esplicitamente ogni traiettoria.
- i moti sono regolari
- esistono delle coordinate speciali (simplettiche) in cui la dinamica è estremamente semplice

che succede a queste proprietà se prendo in considerazione la perturbazione?

Domande:

Se la perturbazione introduce un attrito mi aspetto che i moti dopo un tempo (lungo ma finito) si fermino.

Se la perturbazione preserva la struttura Hamiltoniana e se lo spazio delle fasi ha dim > 2:

- si può descrivere esplicitamente ogni traiettoria?
- i moti sono regolari o "caotici"?
- esistono delle coordinate simplettiche speciali in cui la dinamica è estremamente semplice?

Domande:

Se la perturbazione introduce un attrito mi aspetto che i moti dopo un tempo (lungo ma finito) si fermino.

Se la perturbazione preserva la struttura Hamiltoniana e se lo spazio delle fasi ha dim > 2:

- si può descrivere esplicitamente ogni traiettoria?
- i moti sono regolari o “caotici”?
- esistono delle coordinate simplettiche speciali in cui la dinamica è estremamente semplice?

Domande:

Se aggiungiamo una piccola perturbazione che preserva la struttura Hamiltoniana e se lo spazio delle fasi ha dim > 2:

- si può descrivere esplicitamente ogni traiettoria? in generale NO
- i moti sono regolari o "caotici"?
- esistono delle coordinate simplettiche speciali in cui la dinamica è estremamente semplice?

Domande:

Se aggiungiamo una piccola perturbazione che preserva la struttura Hamiltoniana e se lo spazio delle fasi ha dim > 2:

- si può descrivere esplicitamente ogni traiettoria? in generale NO
- i moti sono regolari o “caotici”? c’è una coesistenza di moti caotici e moti regolari
- esistono delle coordinate simplettiche speciali in cui la dinamica è estremamente semplice?

Domande:

Se aggiungiamo una piccola perturbazione che preserva la struttura Hamiltoniana e se lo spazio delle fasi ha dim > 2:

- si può descrivere esplicitamente ogni traiettoria? in generale NO
- i moti sono regolari o “caotici”? c’è una coesistenza di moti caotici e moti regolari
- esistono delle coordinate simplettiche speciali in cui la dinamica è estremamente semplice? in generale NO

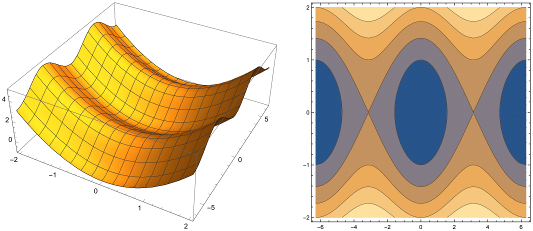
Le risposte a queste domande fondamentali sono l'argomento della

TEORIA di Kolmogorov Arnol'd Moser (KAM)

Sistemi Hamiltoniani in dimensione due

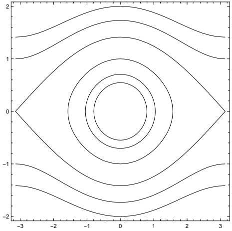
Le orbite sono curve di livello dell' Hamiltoniana

$$H(p, q) = \text{costante}$$



Sistemi Hamiltoniani in dimensione due: azione/angolo

Guardiamo le curve di livello compatte che non si autointersecano: sono topologicamente dei cerchi



(si può dimostrare che) esiste una scelta di coordinate simplettiche (I, θ) dette azione/angolo
in modo che

- I è l'area racchiusa dalla curva
- θ è un angolo (che parametrizza la curva).

Sistemi Hamiltoniani in dimensione due: azione/angolo

Dato che I è una costante del moto e

$$\dot{I} = 0 = -\partial_\theta H$$

deve essere vero che H dipende solo dalle azioni, quindi $H = H(I)$

$$\dot{I} = -\frac{\partial}{\partial\theta} H(I) = 0\,, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial I} H(I)$$

questo produce orbite regolari e permette di risolvere esplicitamente

$$I(t) = I(0)\,, \quad \theta(t) = \theta(0) + \frac{\partial H}{\partial I}(I(0))t$$

Sistemi Hamiltoniani in dimensione > 2

Usando la conservazione dell'energia

$$H(q,p) = E$$

è una equazione in dimensione $2n$ che mi da una $(2n-1)$-varietà: questo non basta per determinare le orbite!
Se ci sono altre $n-1$ costanti del moto indipendenti

$$K_1(q,p) = \text{costante}, \ldots, K_{n-1}(q,p) = \text{costante}$$

le n equazioni determinano una superficie ($n-$dimensionale)

Sistemi Hamiltoniani in dimensione > 2

Usando la conservazione dell'energia

$$H(q,p) = E$$

è una equazione in dimensione $2n$ che mi da una $(2n-1)$-varietà: questo non basta per determinare le orbite!
Se ci sono altre $n-1$ costanti del moto indipendenti

$$K_1(q,p) = \text{costante}, \ldots, K_{n-1}(q,p) = \text{costante}$$

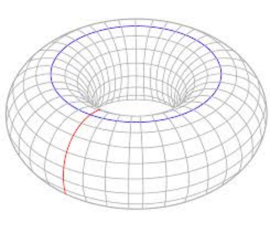
le n equazioni determinano una superficie ($n-$dimensionale)

Integrabilità

- SE questa superficie è compatta e connessa
- SE non ci sono punti singolari (in ciascun punto i due campi vettoriali sono indipendenti)

Theorem (Liouville)

- *La superficie è un toro.*



Integrabilità

- SE questa superficie è compatta e connessa
- SE non ci sono punti singolari (in ciascun punto i due campi vettoriali sono indipendenti)

Theorem (Arnol'd-Liouville)

- *La superficie è un toro.*
- *In un intorno del toro: esistono delle coordinate simplettiche* I, θ, *tali che* $I = (I_1, \dots, I_n)$ *sono costanti del moto e* $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ *sono angoli che parametrizzano il toro.*

Integrabilità

Se ci sono n costanti del moto indipendenti vicino ad un toro invariante ce ne sono altri

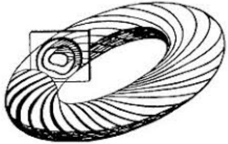


Figure 1. Nested families of tori of quasi-periodic motions in phase-space. (From Arnol'd (42)

e c'è un modo di utilizzare delle coordinate simplettiche comuni. In queste coordinate $H = H(I)$
e le equazioni sono:

$$\dot{I} = 0\,, \quad \dot{\theta} = \partial_I H(I)\,,$$

Integrabilità

Quindi per un sistema Hamiltoniano in dimensione $2n$, con n costanti del moto indipendenti

le traiettorie sono genericamente di moto lineare su un toro.

$$\dot{I} = 0\,, \quad \dot{\theta} = \partial_I H(I)\,,$$

diventa
$I(t) = I(0)$ e $\theta(t) = \theta(0) + \partial_I H(I(0))t$

Frequenza

La velocità (costante) con cui è percorso il toro è la frequenza $\omega = \partial_I H(I(0))$

Teoria delle perturbazioni

Un sistema Hamiltoniano come nel caso precedente si dice integrabile. Fino alla fine del '800 la gente era convinta che i sistemi naturali dovessero essere integrabili, e che si potessero calcolare esattamente le correzioni dovute all'approssimazione.

Nello studio del moto dei pianeti si sapevano calcolare le correzioni alle leggi di Keplero dovute alle interazioni fra i pianeti: tali orbite sembravano regolari

In questo modo per esempio Le Verrier ha previsto l'esistenza di Nettuno.

Nello studiare il problema dei tre corpi H. Poincaré si accorge che ci sono delle serie difficoltà a giustificare matematicamente questo approccio perturbativo

Teoria delle perturbazioni

Un sistema Hamiltoniano come nel caso precedente si dice integrabile. Fino alla fine del '800 la gente era convinta che i sistemi naturali dovessero essere integrabili, e che si potessero calcolare esattamente le correzioni dovute all'approssimazione.

Nello studio del moto dei pianeti si sapevano calcolare le correzioni alle leggi di Keplero dovute alle interazioni fra i pianeti: tali orbite sembravano regolari

In questo modo per esempio Le Verrier ha previsto l'esistenza di Nettuno.

Nello studiare il problema dei tre corpi H. Poincaré si accorge che ci sono delle serie difficoltà a giustificare matematicamente questo approccio perturbativo

Teoria delle perturbazioni

Un sistema Hamiltoniano come nel caso precedente si dice integrabile. Fino alla fine del '800 la gente era convinta che i sistemi naturali dovessero essere integrabili, e che si potessero calcolare esattamente le correzioni dovute all'approssimazione.

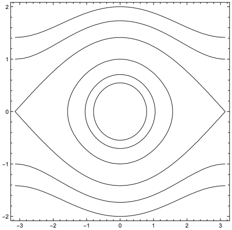
Nello studio del moto dei pianeti si sapevano calcolare le correzioni alle leggi di Keplero dovute alle interazioni fra i pianeti: tali orbite sembravano regolari

In questo modo per esempio Le Verrier ha previsto l'esistenza di Nettuno.

Nello studiare il problema dei tre corpi H. Poincaré si accorge che ci sono delle serie difficoltà a giustificare matematicamente questo approccio perturbativo

Teoria delle perturbazioni: il pendolo

Poincaré studia un modello molto semplice: il pendolo $H = \frac{p^2}{2} - \cos(q)$ le cui orbite sono

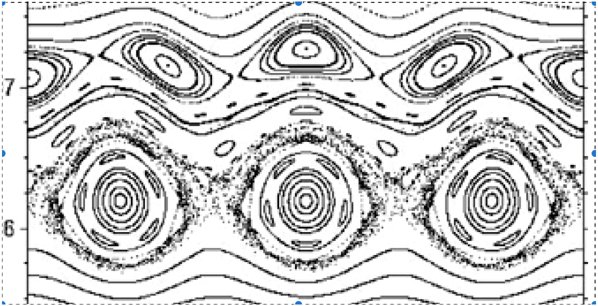


aggiunge una piccola perturbazione periodica nel tempo e cerca di costruire una soluzione vicino alla separatrice...

... Si sarà colpiti dalla complessità di questa figura, che non cerco neppure di tracciare. Niente è piú adatto a darci un' idea della complessità del problema dei tre corpi, e in generale di tutti i problemi di dinamica in cui non si hanno integrali uniformi...

Sistemi quasi-integrabili

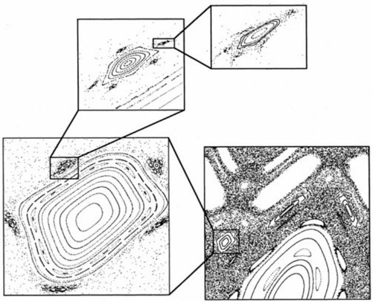
Ecco una simulazione delle orbite oscillatorie per un pendolo periodicamente forzato...



per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_c$ ci sono sia orbite "caotiche" che orbite regolari (tori)!

Sistemi quasi-integrabili

La regione dei dati iniziali che supportano le orbite regolari è estremamente complicata!



Condizioni Diofantee

Per studiare le orbite regolari serve un modo per parametrizzare i tori invarianti... Kolmogorov: è conveniente usare la frequenza $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Dati $\gamma, \tau > 0$, si dice che ω è γ, τ-diofanteo se per ogni $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ si ha

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}$$

questo vuol dire che ω_i/ω_j é irrazionale e *si approssima male con i razionali*

Condizioni Diofantee

Per studiare le orbite regolari serve un modo per parametrizzare i tori invarianti... Kolmogorov: è conveniente usare la frequenza $\omega \in \mathbb{R}^n$.
Dati $\gamma, \tau > 0$, si dice che ω è γ, τ-diofanteo se per ogni $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ si ha

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}$$

questo vuol dire che ω_i/ω_j é irrazionale e *si approssima male con i razionali*

Orbite quasi-periodiche e teorema KAM

Data una Hamiltoniana analitica

$$H(I,\theta) = h(I) + \varepsilon f(\theta, I)$$

Theorem (Kolmogorov-Arnold-Moser)

Per ogni ω diofanteo e per ogni ε sufficientemente piccolo, esiste un cambiamento di coordinate simplettico (dipendente da ω, ε)

$$(I,\theta) \xleftrightarrow{\Psi_\omega} (y, \varphi)$$

in cui la Hamiltoniana si scrive come

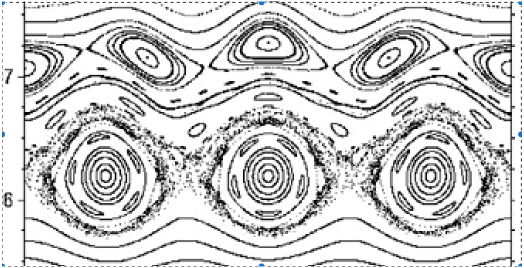
$$H \rightsquigarrow \omega \cdot y + F(\varepsilon, \omega, y, \varphi)\,, \quad F(\varepsilon, \omega, y, \varphi) = O(y^2)$$

cioè $y = 0$ è un toro invariante per la dinamica, e per ogni dato iniziale $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$ il moto sul toro invariante è dato da

$$y(t) = 0\,, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t,$$

Ricerca a Roma Tre

La teoria KAM si sviluppa a partire dal teorema sopra.



- Tori "secondari" (Biasco-Chierchia)
- Tori non-massimali (C.-Gentile)
- Fenomeni di instabilità (Haus-Procesi)
- KAM per PDE - ovvero dimensione infinita (Biasco-C.-Feola-Gentile-Haus-Massetti-Procesi)

KAM per PDE

Ad esempio la NLS (Non-Linear Schrödinger): viene dall'idrodinamica ed è noto che per ogni soluzione della NLS c'è una soluzione dell'equazione delle onde che rimane "vicino" alla soluzione di NLS per tempi "lunghi"

Modellino semplificato

Un modello semplificato per la NLS sul circle con parametri esterni V:

$$\mathrm{i}u_t - u_{xx} + V * u + \varepsilon F(|u|^2)u = 0, \qquad x \in \mathbb{T}$$

- $V = (V_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ moltiplicatore di Fourier:

$$u(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j e^{\mathrm{i}jx}\,, \quad V * u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} V_j u_j e^{\mathrm{i}jx}\,;$$

- F analitica $F(y) : B_R(0) \to \mathbb{R}$ tale che $F(0) = 0$.

In Fourier

$$\mathrm{i}\dot{u}_j + (j^2 + V_j)u_j + \varepsilon[F(|u|^2)u]_j = 0, \qquad j \in \mathbb{Z}$$

assomiglia a un sistema di infiniti oscillatori armonici debolmente accoppiati

$$\mathrm{i}\dot{u}_j + (\omega_j + \varepsilon\eta_j)u_j + \varepsilon F_j(u, \bar{u}) = 0, \qquad j = -N, \dots, N$$

nel limite $N \to \infty$, con $j^2 + V_j = \omega_j + \varepsilon\eta_j$

KAM (nella versione dei controtermini di Moser) mi dice che il sistema di oscillatori armonici ha soluzioni quasi-periodiche con frequenza ω, analitiche in ε, della forma

$$u_j(t) = e^{\mathrm{i}\omega_j t} c_j + O(\varepsilon), \qquad c_j \in \mathbb{C}$$

Mi aspetto che qualcosa del genere succeda anche nel caso di infiniti oscillatori armonici, ma con infinite frequenze

Soluzioni almost-periodiche!

KAM (nella versione dei controtermini di Moser) mi dice che il sistema di oscillatori armonici ha soluzioni quasi-periodiche con frequenza ω, analitiche in ε, della forma

$$u_j(t) = e^{\mathrm{i}\omega_j t} c_j + O(\varepsilon), \qquad c_j \in \mathbb{C}$$

Mi aspetto che qualcosa del genere succeda anche nel caso di infiniti oscillatori armonici, ma con infinite frequenze

Soluzioni almost-periodiche!

In dimensione finita KAM mi dice che le soluzioni quasi-periodiche sono tipiche

In dimensione infinita la faccenda si complica!
Anche l'esistenza di soluzioni almost-periodiche non è chiarissima e dipende fortemente dallo spazio in cui si cercano le soluzioni e dalla regolarità dei parametri V

In dimensione finita KAM mi dice che le soluzioni quasi-periodiche sono tipiche

In dimensione infinita la faccenda si complica!
Anche l'esistenza di soluzioni almost-periodiche non è chiarissima e dipende fortemente dallo spazio in cui si cercano le soluzioni e dalla regolarità dei parametri V

Chierchia-Perfetti '95: NON una PDE (invece di j^2 avevano e^j)

Autori	Decadimento dei c_j	Regolarità di V
[Pö'02,Bo'96]	almeno superesponenziale	ℓ_2
[Geng-Xu'12–'16]	esponenziale	ℓ_2
[Bo'04 + sotto*]	subesponenziale	ℓ_∞
[BMP'22]	polinomiale†	ℓ_∞

below* = Biasco-Massetti-Procesi soluzioni Gevrey per NLS.
Cong-Liu-Shi-Yuan stabilità più che lineare.
Cong-Mi-Shi-Wu NLS senza conservazione del momento.
Cong-Yuan NLW.

$\dagger$ = hanno bisogno che infiniti c_j siano nulli
(non mi aspetto che questo sia "tipico")

Recentissimo

Cerco un toro invariante per la NLS $u = U(\omega t, x)$ ovvero guardo all'equazione

$$\mathrm{i}\omega \cdot \partial_\varphi U - U_{xx} + V * U + \varepsilon |U|^4 U = 0 \tag{1}$$

e cerco una soluzione della forma

$$U(\varphi, x) = \sum_j c_j e^{\mathrm{i}\varphi_j + \mathrm{i}jx} + O(\varepsilon)\,, \quad |c_j| \leq e^{-s\sqrt{\langle j \rangle}} \tag{2}$$

Theorem (C.-Gentile-Procesi '22)

Per ogni $N \geq 0$*,*
per ogni $c = \{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ *come sopra,*
per molte frequenze $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$*,*

$$\textit{esiste} \quad V \quad \in \quad \mathtt{w}_{N,\infty} := \{\{\langle j \rangle^N V_j\} \in \ell_\infty\}$$

tale che la (1) *ha una soluzione almost-periodica della forma* (2)*, Gevrey in* x *e analitica in* φ

Grazie per l'attenzione!